Fiche N°4-7
Préparation E3C

Instruments et gamme

Partie 1 : des instruments et des notes

1- La fréquence double lorsque que la note est augmentée d'une octave.
$f = 2 \times 441 = 882$ Hz.

2-a- Les périodes de ces signaux sont différentes, donc leurs fréquences aussi. Il s'agit donc de deux notes différentes.

2-b- Pour le signal de la figure 1 :

Graphiquement : $3T = 11{,}5$ carreaux or un carreau correspond à 1ms.

Donc $T = \frac{11{,}5}{3}$ ms $\approx 3{,}83 \times 10^{-3}$s. Puis $f = \frac{1}{T} \approx 261$ Hz. D'après le document 1 il s'agit d'un Do3.

Pour le signal de la figure 2 :

Graphiquement : $4T = 10{,}2$ carreaux or un carreau correspond à 1 ms donc

$T = \frac{10{,}2}{4} \approx 2{,}55 \times 10^{-3}$s. Puis $f = \frac{1}{T} \approx 392$ Hz. D'après le document 1 il s'agit d'un Sol3.

Partie 2 : des notes et des gammes

3-

Si $1 \leq f < \frac{4}{3}$, alors $\frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}f < \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}$ et donc $1 < \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}f < 2$.

Si $\frac{4}{3} \leq f < 2$, alors $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \leq \frac{3}{2}f < \frac{3}{2} \times 2$, soit $2 \leq \frac{3}{2}f < 3$ donc $1 \leq \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}f \leq \frac{3}{2} < 2$.

4- Valeurs exactes et approchées des fréquences des 12 premières quintes obtenues par l'algorithme :

Numéro de la quinte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence associée (fraction)	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$
valeur approchée à 10^{-2} près	1	1,5	1,13	1,69	1,27	1,90	1,42	1,07	1,60	1,20	1,80	1,35	1,01

5- Dans le tableau précédent la fréquence n'est jamais égale à 1 donc l'algorithme ne termine pas pour $n \leq 12$.

6-a- $\frac{3^m}{2^n} = 1$ si et seulement si $3^m = 2^n$. Cette égalité est impossible car 3^n est un nombre impair et 2^m est un nombre pair (m est non nul). Aucune des fréquences calculées dans l'algorithme ne sera donc égale à 1.

6-b- L'algorithme ne s'arrête pas puisque la condition d'arrêt $f = 1$ n'est jamais vérifiée.

7- Dans le tableau de la question 4, on remarque que la fréquence de la note numéro 12 (la treizième note) est proche de 1 donc au bout de 12 notes, on revient presque à la fréquence de départ $f_0 = 1$. En considérant que la fréquence de la 13^e note est égale à la fréquence fondamentale 1, on peut construire une suite finie de notes réparties dans une octave (une gamme).

8-a- Les fréquences obtenues ne sont pas égales à celles inscrites sur le piano. Il ne s'agit pas de la même gamme.

8-b- Pour la gamme naturelle à douze notes :

$\frac{\text{fréquence du Do\#}}{\text{fréquence du Do}} = 1{,}07$; $\frac{\text{fréquence du Ré}}{\text{fréquence du Do\#}} = = 1{,}05$.

Ces deux rapports sont différents. Les demi-tons de la gamme de Pythagore à douze notes ne sont pas égaux.

9-a- Gamme du piano de la partie 1

$\frac{\text{fréquence du Do\#}}{\text{fréquence du Do}} = 1{,}06$; $\frac{\text{fréquence du Ré}}{\text{fréquence du Do\#}} = 1{,}06$. On constate que ces rapports sont égaux.

9-b- La gamme utilisée est la gamme à tempérament égal. Elle divise l'octave en 12 intervalles égaux. Le rapport des fréquences de deux notes consécutives de cette gamme est égal à $\sqrt[12]{2}$ (demi-ton tempéré).