Fiche N°2-3-1
Mécanique

Saut à Ski

La médaille d'or d'Andreas Wellinger

Le 10 février 2018, lors des JO d'hiver de PyeongChang, dans des conditions difficiles en raison d'un vent important, l'Allemand Andreas Wellinger a réalisé, sur le tremplin HS109 d'Alpensia, un saut qui lui a permis d'obtenir la médaille d'or.

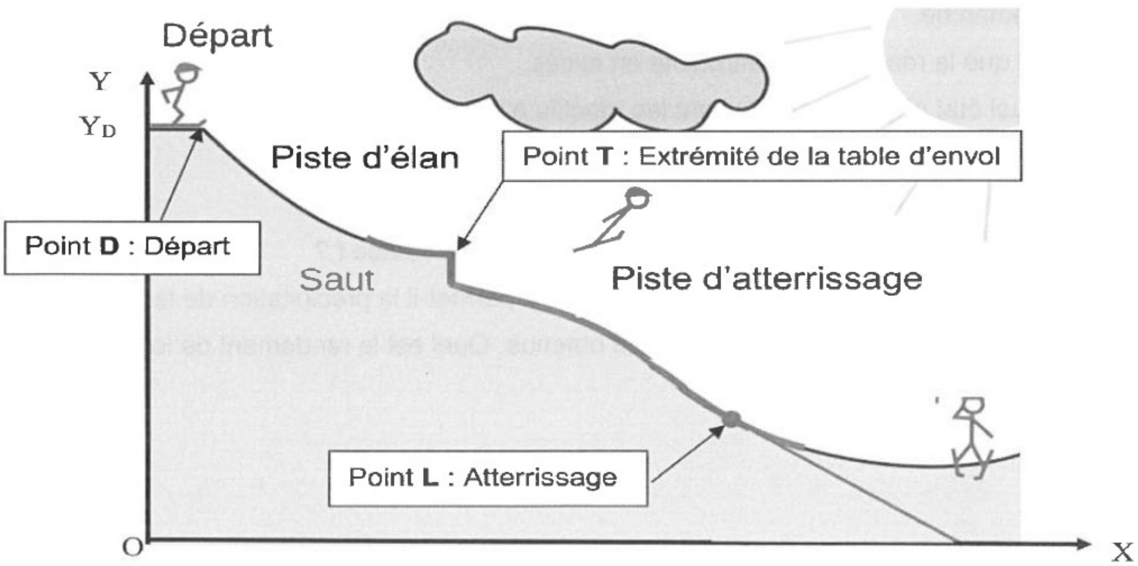
L'exercice consiste à faire l'étude du mouvement d'Andreas Wellinger sur la piste d'élan et lors du saut dans le cadre d'un modèle simplifié et de comparer les résultats obtenus aux mesures réalisées le jour de l'épreuve olympique.

Données :

- accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8\ \text{m.s}^{-2}$;
- masse de Andreas Wellinger avec son équipement : $m = 70$ kg ;
- altitude du point de départ D : $y_D = 98$ m ;
- altitude au point d'envol T (bout de la table d'envol) : $y_T = 65$ m ;
- inclinaison de la table d'envol : $\alpha = 11°$;
- vitesse de décollage mesurée : $v_T = 83{,}3\ \text{km.h}^{-1}$.

Cette étude sera menée dans le référentiel terrestre, le système {skieur + équipement} sera considéré comme un point matériel. On négligera tout type de frottement.
Au départ de l'épreuve, au point D, la vitesse du skieur est nulle.
La valeur de l'énergie potentielle de pesanteur est nulle en $y = 0$.

Modélisation de la piste de saut à ski



Fiche N°2-3-1
Mécanique

Saut à Ski

1. **Étude du mouvement du skieur sur la piste d'élan du tremplin**

   1.1. Calculer la valeur de E_{mD} l'énergie mécanique du système au point D.

   1.2. Exprimer l'énergie mécanique E_{mT} du système au point T en fonction de la masse m du système, de l'accélération g de la pesanteur, de l'altitude y_T du point T et de la vitesse v_T au point T.

   1.3. En utilisant une approche énergétique, montrer que l'expression littérale de la valeur v_T de la vitesse du système au bout de la table d'envol est $v_T = \sqrt{2g.(y_D - y_T)}$. Calculer sa valeur numérique.

   1.4. Le résultat obtenu par calcul pour la vitesse de décollage v_T est-il en accord avec la valeur mesurée le jour de l'épreuve ? Commenter.

SAUT À SKI AUX JEUX OLYMPIQUES D'HIVER 2018

1. Étude du mouvement du skieur sur la piste d'élan du tremplin

1.1. $E_{mD} = E_{cD} + E_{ppD}$

$E_{mD} = \frac{1}{2}.m.v_D^2 + m.g.y_D$

Comme $v_D = 0$, alors $E_{mD} = m.g.y_D$

$E_{mD} = 70 \times 9,8 \times 98 = 6,7\times10^4$ J

1.2. $E_{mT} = E_{cT} + E_{ppT}$

$E_{mT} = \frac{1}{2}.m.v_T^2 + m.g.y_T$

1.3. On néglige tout type de frottement, alors il y a conservation de l'énergie mécanique lors du mouvement entre les points D et T.

$E_{mD} = E_{mT}$

$m.g.y_D = \frac{1}{2}.m.v_T^2 + m.g.y_T$

On divise chaque terme par m, et on multiplie chaque terme par 2.

$2.g.y_D = v_T^2 + 2.g.y_T$

$v_T^2 = 2.g.y_D - 2.g.y_T = 2.g.(y_D - y_T)$

$v_T = \sqrt{2.g.(y_D - y_T)}$

$v_T = \sqrt{2\times9,8\times(98-65)} = 25$ m.s^{-1}

En multipliant par 3,6, on obtient $v_T = 92$ km.h^{-1}

1.4. La vitesse mesurée vaut 83,3 km.h^{-1}, elle est inférieure à celle calculée. Ces résultats sont en accord, en effet les frottements ne sont en réalité pas négligeables et une partie de l'énergie mécanique a été dissipée sous forme de chaleur.

2. **Étude du mouvement du skieur lors du saut**

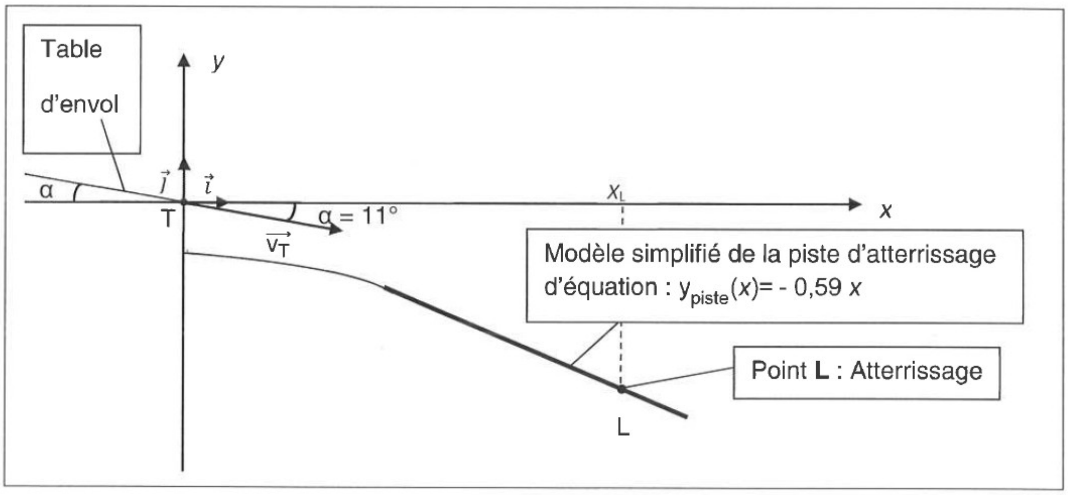
Pour cette étude, on utilise le repère orthonormé (T, $\vec{i}$, $\vec{j}$), T étant le point situé au bout de la table d'envol.

On modélise de manière simplifiée l'allure de la piste d'atterrissage par une droite d'équation $y_{piste}(x) = -0,59\,x$.

On notera x_L l'abscisse du point d'atterrissage L.

Fiche N°2-3-1
Mécanique

Saut à Ski



2.1 En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer les coordonnées du vecteur accélération lors du saut.

2.2 Montrer, en détaillant chaque étape de votre raisonnement, que les équations horaires du point matériel M représentant le système étudié lors du saut dans le champ de pesanteur s'écrivent :

$$x(t) = v_T \cos\alpha\ t$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}\ g\ t^2 - v_T \sin\alpha\ t$$

2.3 En déduire que l'équation de la trajectoire du point matériel M s'écrit :

$$y(x) = -9,5 \times 10^{-3}\ x^2 - 1,9 \times 10^{-1}\ x$$

Dans cette équation *x* et *y* sont exprimés en mètres.

2. Étude du mouvement du skieur lors du saut

2.1. Système {skieur+équipement} de masse *m* supposée constante et assimilé à un point matériel M.

Référentiel terrestre supposé galiléen 	Repère (T, $\vec{i}, \vec{j}$) indiqué dans le sujet

Forces : poids , $\vec{P} = m.\vec{g}$

les forces de frottement de l'air sont négligées

Deuxième loi de Newton : $\Sigma\overrightarrow{F_{ext.}} = m.\vec{a}$

soit $\vec{P} = m.\vec{a}$ soit $m.\vec{g} = m.\vec{a}$ d'où $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$

En projection dans le repère : $\boxed{\vec{a}\begin{cases} a_x(t) = g_x = 0 \\ a_y(t) = g_y = -g \end{cases}}$

Saut à Ski

2.2.

Or $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ donc $\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{pmatrix}$ en primitivant $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -g.t + C_2 \end{pmatrix}$

À t = 0, $\vec{v}(t=0) = \overrightarrow{v_T}$ avec $\overrightarrow{v_T}\begin{pmatrix} v_{Tx} = v_T.\cos\alpha \\ v_{Tz} = -v_T.\sin\alpha \end{pmatrix}$

Donc en égalant les coordonnées des deux vecteurs, il vient $\begin{pmatrix} C_1 = v_T.\cos\alpha \\ 0 + C_2 = -v_T.\sin\alpha \end{pmatrix}$

Finalement : $\boxed{\vec{v}\begin{pmatrix} v_x(t) = v_T.\cos\alpha \\ v_y(t) = -g.t - v_T.\sin\alpha \end{pmatrix}}$

Et $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{TM}}{dt}$ donc $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = v_T.\cos\alpha \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = -g.t - v_T.\sin\alpha \end{pmatrix}$

en primitivant $\overrightarrow{TM}\begin{pmatrix} x(t) = v_T.\cos\alpha.t + C_3 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g.t^2 - v_T.\sin\alpha.t + C_4 \end{pmatrix}$

Finalement les équations horaires *x(t)* et *y(t)* sont : $\boxed{\overrightarrow{TM}\begin{pmatrix} x(t) = v_T.\cos\alpha.t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g.t^2 - v_T.\sin\alpha.t \end{pmatrix}}$

2.3. Déterminons l'équation de la trajectoire $y = f(x)$.

Comme $x(t) = v_T.\cos\alpha.t$ alors $t = \dfrac{x}{v_T.\cos\alpha}$.

On introduit cette expression de t dans l'expression de $y(t)$.

$y(x) = -\dfrac{1}{2}.g.\dfrac{x^2}{(v_T.\cos\alpha)^2} - v_T.\sin\alpha.\dfrac{x}{v_T.\cos\alpha}$.

$y(x) = -\dfrac{g}{2(v_T.\cos\alpha)^2}.x^2 - \tan\alpha.x$

$y(x) = -\dfrac{9{,}8}{2(\dfrac{83{,}3}{3{,}6}\times\cos 11)^2}.x^2 - \tan 11.x = -9{,}5\times10^{-3}\ .\ x^2 - 1{,}9\times10^{-1}.x$

Fiche N°2-3-1
Mécanique

Saut à Ski

2.4 Le jour de l'épreuve olympique, la longueur réelle mesurée lors du saut étudié a été de 113 m. Cette longueur correspond à la longueur TL sachant que le point d'atterrissage L a une abscisse réelle égale à 97 m.

Le cadre du modèle précédent permet-il de rendre compte de la valeur réelle de l'abscisse du point d'atterrissage ?

Commenter.

2.4. D'après l'énoncé, on a TL = 113 m et x_L = 97 m

Au point L, la droite d'équation $y_{piste}(x) = -0{,}59.x$ croise la parabole modélisant la trajectoire du skieur d'équation $y(x) = -9{,}5\times10^{-3}\ .\ x^2 - 1{,}9\times10^{-1}.x$.

Si le modèle est correct $y_{piste}(x_L) = y(x_L)$
$-0{,}59.x_L = -9{,}5\times10^{-3}\ .\ x_L^2 - 1{,}9\times10^{-1}.x_L$
$9{,}5\times10^{-3}\ .\ x_L^2 + 1{,}9\times10^{-1}.x_L - 0{,}59.x_L = 0$
$9{,}5\times10^{-3}\ .\ x_L^2 - 0{,}40.x_L = 0$
$x_L.(9{,}5\times10^{-3}\ .\ x_L - 0{,}40) = 0$
Cette égalité est vérifiée si $x_L = 0$ solution qui ne correspond pas à la situation,
ou si $9{,}5\times10^{-3}\ .\ x_L - 0{,}40 = 0$,
soit si $x_L = \dfrac{0{,}40}{9{,}5\times10^{-3}} = 42$ m
Le modèle théorique indique que l'abscisse du point d'atterrissage est largement inférieure à l'abscisse réelle égale à 97 m.

L'introduction indique la présence d'un vent important le jour de l'épreuve. Celui-ci a sans doute joué un très grand rôle sur l'abscisse du point d'atterrissage.
Le skieur a profité du vent pour planer et atterrir beaucoup plus loin que ce que prévoit notre modèle théorique simplifié.